

Optymalizacja portfela na polskim rynku papierów wartościowych

Stanisław Galus, Katarzyna Sokołowska

16 lipca 2008 r.

Streszczenie

W pracy badamy technikę konstruowania portfela akcji opartą na teorii Markowitza. Przedmiotem badań jest około 90000 inwestycji we wszystkie akcje notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w latach 1992–2007. Bierzymy pod uwagę inwestycje o okresie trwania od jednego dnia do jednego roku. Analizujemy wybór portfela o minimalnym ryzyku oraz wybór portfela o minimalnym ryzyku przy różnych zakładanych stopach zwrotu. Każdą inwestycję rozpatrujemy przy kilku wartościach stopy prowizji od operacji kupna i sprzedaży akcji. Pokazujemy, że rzeczywiste stopy zwrotu są dla większości portfeli niższe od oczekiwanych, co sprawia, że stosowanie teorii Markowitza do konstrukcji portfela akcji nie wydaje się być korzystne dla inwestora. Niemniej jednak, spośród analizowanych portfeli, ze względu na duży średni błąd ujemnych odchyłeń rzeczywistej od założonej stopy zwrotu, najbardziej opłacalne wydają się być inwestycje 180 dniowe. Potwierdza to również analiza średnich stóp zwrotu, pokazując, że są one wysokie dla portfeli konstruowanych dla inwestycji półrocznych i rocznych. Jednakże, niezależnie od długości inwestycji, stopy zwrotu z portfeli konstruowanych rozważaną metodą charakteryzują się tak dużą zmiennością, że jest ona w praktyce nieużyteczna.

1 Wstęp

W niniejszej pracy zajmujemy się optymalizacją portfela akcji, czyli wyborem tych akcji spośród wielu, które najlepiej spełniają oczekiwania inwestora. Jedną z najpoważniejszych technik takiego wyboru jest oparta na teorii Markowitza [5]. W teorii tej zakłada się, że stopy zwrotu akcji są zmiennymi losowymi, a oczekiwane stopy zwrotu i ryzyka utożsamia się odpowiednio z wartościami oczekiwanymi i wariancjami lub odchyleniami standardowymi tych zmiennych. Dokładniej, rozpatrujemy n akcji, których stopy zwrotu $r = [r_1, \dots, r_n]^T$ mają n -wymiarowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i macierzy kowariancji Σ , przy czym zakładamy, że parametry $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$ i $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, tego rozkładu są znane. Portfel złożony z tych akcji definiujemy jako dowolny wektor $w = [w_1, \dots, w_n]^T$

o nieujemnych i sumujących się do jedności składowych; w_i interpretujemy jako udział i -tej akcji w portfelu. Przy tych założeniach stopa zwrotu $w^T r$ portfela w ma jednowymiarowy rozkład normalny $N(\mu_w, \sigma_w^2)$, gdzie $\mu_w = w^T \mu$ jest oczekiwaną stopą zwrotu portfela w , a $\sigma_w^2 = w^T \Sigma w$ – jego ryzykiem.

W najprostszym ujęciu, z punktu widzenia inwestora ważne są dwa zagadnienia: znalezienie portfela o najmniejszym ryzyku oraz znalezienie portfela o najmniejszym ryzyku spośród portfeli mających pożądaną stopę zwrotu μ_0 . Zagadnienia te można przekształcić odpowiednio w następujące zagadnienia programowania kwadratowego [3, str. 276 – 282]:

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & w^T \Sigma w \\ \text{przy ograniczeniach} & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

i

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & w^T \Sigma w \\ \text{przy ograniczeniach} & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mu_0 \\ & w_i \geq 0 \end{array} \quad (2)$$

W zagadnieniach praktycznych parametry μ_i oraz σ_{ij} szacuje się na podstawie szeregu przeszłych cen akcji. Jeśli $(p_{it})_{t=0}^m$, $m \geq 1$, jest szeregiem cen i -tej akcji, to $(r_{it})_{t=0}^{m-d}$, gdzie

$$r_{it} = \frac{p_{i,t+d} - p_{it}}{p_{it}},$$

jest szeregiem stóp zwrotu tej akcji dla inwestycji obejmującej $d \geq 1$ okresów, a parametry szacuje się przy pomocy następujących wzorów [1, str. 379]:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} r_{it}, \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} (r_{it} - \hat{\mu}_i)(r_{jt} - \hat{\mu}_j). \quad (4)$$

W pracy przeprowadzimy symulację działania inwestora wykorzystującego metody (1) i (2) w praktyce inwestowania w akcje notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w latach 1992–2007. Odpowiemy na pytanie, jak dalece rzeczywiste zyski osiągnane przy pomocy tych metod różnią się od oczekiwanych oraz spróbujemy opisać rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistych stóp zwrotu osiągniętych przy pomocy tych metod. Analizę przeprowadzimy dla różnych okresów inwestowania oraz dla różnych oczekiwanych stóp zwrotu. Mimo że metody (1) i (2) zakładają normalność rozkładów stóp zwrotu, stosuje się je w praktyce nie badając spełnienia tego założenia.¹

¹Normalność rozkładów stóp zwrotu z akcji notowanych na GPW została zdecydowanie odrzucona w pracy [2].

2 Metoda

Przyjmujemy następujący model zachowania się inwestora. Załóżmy, że zamierza on zainwestować na okres d dni kapitał w akcje notowane na GPW, przy czym stopa zwrotu, jaką chce uzyskać z tej inwestycji, wynosi μ_0 . Do wyboru akcji używa metod (1) i (2), oszacowawszy przedtem parametry (3) i (4) na podstawie znanych przeszłych cen akcji, pochodzących z okresu zawierającego obserwacje z ostatnich $m + d$ dni², bezpośrednio poprzedzających dzień rozpoczęcia inwestycji. Metoda (2) wyznacza optymalny portfel, o ile

$$\min(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n) \leq \mu_0 \leq \max(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n) \leq \mu_0,$$

w pozostałych przypadkach, najczęściej gdy inwestor wybierze zbyt dużą stopę zwrotu μ_0 , taki portfel nie istnieje.

Używając wyznaczonych wag w_i , inwestor konstruuje portfel przy bieżących cenach p_i , po czym kończy inwestycję po dokładnie d dniach przy przyszłych cenach p'_i . Oznaczając prowizję od wartości każdej operacji kupna i sprzedaży przez $0 \leq c \leq 1$, stopę zwrotu osiągniętą przez inwestora można wyrazić jako

$$\nu_0 = \frac{1 - c}{1 + c} \sum_{i=1}^n \left(w_i \frac{p'_i}{p_i} \right) - 1.$$

W dalszej części badamy różnice $\mu_0 - \nu_0$ oraz rozkład ν_0 dla różnych okresów inwestycji d , różnych zakładanych stóp zwrotu μ_0 oraz różnych wartości prowizji c . Analiza obejmuje wszystkie akcje notowane na giełdzie warszawskiej w latach 1992–2007 i wszystkie dni giełdowe. Zbiór danych o cenach pochodzi z różnych źródeł³. Badane przez nas okresy inwestycji wynoszą: 1, 5, 10, 15, 30, 90, 180 i 360 dni, stopy zwrotu: bez zakładanej stopy zwrotu (zagadnienie (1)), 1, 2, 5 i 10 procent rocznie (zagadnienie (2)), a stopy prowizji: 0, 1, 2 i 5 procent. Łącznie badamy około 90000 inwestycji, każdą przy czterech różnych stopach prowizji. Liczbę tych inwestycji dla okresu każdej długości i każdej z zakładanych stóp zwrotu przedstawiamy w tabeli 1.

²Stała m zapewnia odpowiednią liczbę obserwacji w próbie. Ogólnie, im większa jest ta stała, tym większa jest liczba obserwacji. W niniejszej pracy przyjęliśmy $m = 90$, co oznacza na przykład, że dla inwestycji o czasie trwania 1 dzień szacowaliśmy parametry na podstawie próby z trzech miesięcy.

³Dane z lat 1991–1999 pochodzą ze zbioru udostępnionego na stronie <http://republika.pl/sgalus/gpw.tgz>, a dane z lat 2000–2007 – z serwisu Giełdy Papierów Wartościowych <http://www.gpw.pl/> oraz serwisu Domu Maklerskiego Banku Ochrony Środowiska <http://bossa.pl/>.

Tabela 1: Liczba rozpatrywanych inwestycji według długości okresu inwestycji d i założonej stopy zwrotu μ_0 .

μ_0 (%)	d (dni)							
	1	5	10	15	30	90	180	360
– ^a	2693	2059	1970	2668	2068	2670	1994	1847
1	2662	2012	1930	2614	2005	2593	1887	1738
2	2662	2012	1929	2614	2005	2592	1886	1737
5	2661	2013	1929	2615	2005	2585	1877	1737
10	2661	2015	1931	2614	2003	2583	1862	1739

^a Inwestycje o minimalnym ryzyku.

3 Wyniki badań

3.1 Zakładana a rzeczywista stopa zwrotu

Dla każdego rodzaju inwestycji otrzymaliśmy ciąg różnic $\mu_0 - \nu_0$. Dla każdego z tych ciągów wyznaczyliśmy procent występujących w nim różnic dodatnich i ujemnych. Wyniki obliczeń zostały zamieszczone w tabeli 2. Z zawartych w niej danych wynika, że w większości przypadków różnice były dodatnie, co oznacza, że stopa zwrotu osiągnięta przez inwestora była mniejsza od założonej stopy zwrotu. Aby sprawdzić, czy prawdopodobieństwo uzyskania dodatniej różnicy było faktycznie większe od prawdopodobieństwa otrzymania różnicy ujemnej posłużyliśmy się testem badającym, czy rozkład różnic jest symetryczny. Sformułowaliśmy następujące hipotezy:

$$\begin{aligned} H_0 &: P(\mu_0 - \nu_0 > 0) = P(\mu_0 - \nu_0 < 0) \\ H_1 &: P(\mu_0 - \nu_0 > 0) \neq P(\mu_0 - \nu_0 < 0). \end{aligned}$$

Sprawdzianem hipotezy zerowej jest statystyka testowa [6, str. 288]

$$\chi^2 = \frac{(N_1 - N_2)^2}{N_1 + N_2},$$

gdzie N_1 i N_2 oznaczają odpowiednio liczbę różnic dodatnich i ujemnych. Obliczona wartość statystyki testowej nie należy do obszaru krytycznego przy poziomie istotności 0,05 jedynie dla portfela o najmniejszym ryzyku, zainwestowanego na okres 360 dni przy stopie prowizji 0 lub 1 procent. Oznacza to, że tylko w przypadku tak skonstruowanych portfeli uzyskanie rzeczywistej stopy zwrotu większej od założonej stopy zwrotu jest tak samo prawdopodobne jak to, że rzeczywista stopa zwrotu będzie mniejsza od oczekiwanej. W pozostałych analizowanych inwestycjach zdecydowanie większe jest – jak wynika z tabeli 2 – prawdopodobieństwo tego, że stopa zwrotu osiągnięta przez inwestora będzie mniejsza od założonej stopy zwrotu.

Tabela 2: Procent różnic ujemnych i dodatnich według długości okresu inwestycji d , założonej stopy zwrotu μ_0 i stopy prowizji c .

μ_0 (%)	c (%)	$\mu_0 - \nu_0$	d (dni)							
			1	5	10	15	30	90	180	360
- ^a	0	-	46,14	44,13	45,61	44,07	43,38	46,70	46,94	50,41
- ^a	0	+	53,86	55,87	54,39	55,90	56,62	53,30	53,06	49,59
- ^a	1	-	10,76	20,24	29,58	31,64	35,15	42,10	45,64	49,00
- ^a	1	+	89,24	79,76	70,42	68,36	64,80	57,90	54,36	51,00
- ^a	2	-	3,38	9,08	19,79	21,68	29,01	38,39	43,53	47,32
- ^a	2	+	96,62	90,92	80,21	78,32	70,99	61,61	56,47	52,68
- ^a	5	-	0,15	1,99	6,80	7,49	15,86	29,59	38,21	41,42
- ^a	5	+	99,85	98,01	93,20	92,51	84,14	70,41	61,79	58,58
1	0	-	24,47	35,02	39,72	42,68	42,49	41,23	45,84	41,25
1	0	+	75,53	64,98	60,28	57,32	57,51	58,77	54,16	58,75
1	1	-	7,24	18,03	26,46	30,88	33,67	37,64	42,61	38,90
1	1	+	92,76	81,97	73,54	69,12	66,33	62,36	57,39	61,10
1	2	-	2,93	8,20	18,64	21,47	27,08	33,94	39,48	36,77
1	2	+	97,07	91,80	81,36	78,53	72,92	66,06	60,52	63,23
1	5	-	0,38	1,94	5,59	8,64	14,96	23,83	31,32	32,91
1	5	+	99,62	98,06	94,41	91,36	85,04	76,17	68,68	67,09
2	0	-	13,02	25,29	32,12	37,29	37,71	39,58	44,54	40,24
2	0	+	86,98	74,71	67,88	62,71	62,29	60,42	55,46	59,76
2	1	-	4,69	12,12	21,97	26,02	30,47	35,80	41,15	38,00
2	1	+	95,31	87,88	77,98	73,98	69,53	64,20	58,85	62,00
2	2	-	2,18	5,96	15,18	17,81	24,64	32,02	38,07	36,10
2	2	+	97,82	94,04	84,82	82,19	75,36	67,98	61,88	63,90
2	5	-	0,30	1,44	4,61	7,57	13,97	22,15	30,12	31,66
2	5	+	99,70	98,56	95,39	92,43	86,03	77,85	69,88	68,34
5	0	-	3,08	8,49	19,03	22,42	27,88	34,43	40,65	37,54
5	0	+	96,92	91,51	80,92	77,58	72,12	65,57	59,35	62,46
5	1	-	1,65	4,52	12,55	15,62	22,99	30,95	37,72	35,35
5	1	+	98,35	95,48	87,45	84,38	76,96	69,05	62,28	64,65
5	2	-	0,94	2,63	8,45	11,19	18,85	27,70	34,95	33,85
5	2	+	99,06	97,37	91,55	88,81	81,15	72,30	65,05	66,15
5	5	-	0,11	0,60	3,11	5,16	10,12	17,99	26,74	28,96
5	5	+	99,89	99,40	96,89	94,84	89,88	82,01	73,26	71,04
10	0	-	0,64	2,48	7,87	10,41	17,42	26,36	34,32	33,53
10	0	+	99,32	97,52	92,13	89,56	82,58	73,64	65,68	66,42
10	1	-	0,34	1,69	5,23	8,00	14,73	22,84	31,85	31,80
10	1	+	99,66	98,31	94,72	92,00	85,27	77,12	68,15	68,20
10	2	-	0,15	1,04	3,62	6,04	12,43	19,78	29,43	30,42
10	2	+	99,85	98,96	96,38	93,96	87,57	80,22	70,57	69,58
10	5	-	0,08	0,15	1,92	3,18	6,79	12,66	22,23	25,99
10	5	+	99,92	99,85	98,08	96,82	93,21	87,34	77,77	74,01

^a Inwestycje o minimalnym ryzyku.

Ponadto sprawdziliśmy, czy na znak rozpatrywanej różnicy ma wpływ moment rozpoczęcia inwestycji. W tym celu posłużyliśmy się testem serii [6, str. 290], formułując następujące hipotezy:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \mu_0 - \nu_0 \text{ jest losowe} \\ H_1 : \quad & \mu_0 - \nu_0 \text{ nie jest losowe.} \end{aligned}$$

Test ten oparty jest na liczbie serii mających taki sam znak. Zbyt mała lub zbyt duża liczba serii zaprzecza losowemu charakterowi próby. Statystyka testowa U przyjmuje postać

$$U = \frac{|K - E(K/N_i)| - 0,5}{D(K/N_i)},$$

gdzie

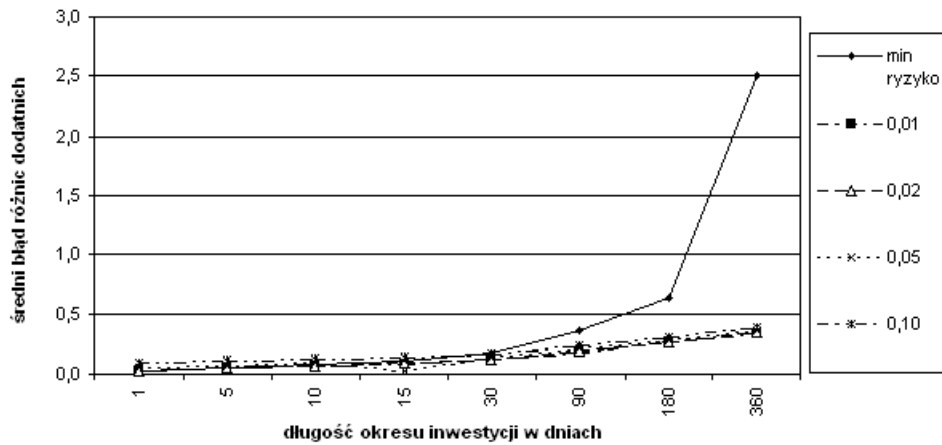
$$E(K/N_i) = \frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2 + 1}, \quad D(K/N_i) = \frac{2N_1N_2[2N_1N_2 - (N_1 + N_2)]}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)},$$

a K oznacza liczbę serii. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma ona rozkład $N(0, 1)$. Dla wszystkich rozpatrywanych ciągów różnic $\mu_0 - \nu_0$ przy poziomie istotności 0,05 odrzuciliśmy hipotezę zerową, co oznacza, że pojawianie się kolejnych różnic nie miało charakteru losowego. Nie udało się nam jednak wyodrębnić okresów, w których przeważałyby liczba różnic ujemnych lub dodatnich.

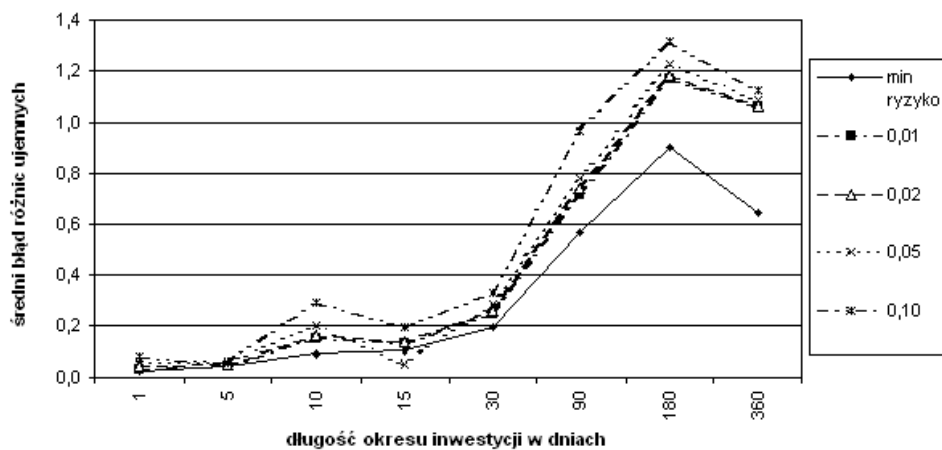
Kolejnym celem, jaki sobie postawiliśmy, było zbadanie, czy na wielkość różnic ma wpływ rodzaj rozpatrywanej inwestycji. Dla każdego rodzaju inwestycji osobno zbadaliśmy różnice ujemne i dodatnie. W tym celu posłużyliśmy się semiodchyleniem standardowym stóp zwrotu [4, str. 186]:

- w przypadku badania różnic dodatnich: $\sqrt{\sum_{i=1}^T (\mu_{0i} - \nu_{0i})_+^2 / N_1}$, gdzie $_+$ oznacza funkcję przyporządkowującą wartości dodatniej tę samą wartość, a wartości ujemnej wartość 0,
- w przypadku badania różnic ujemnych: $\sqrt{\sum_{i=1}^T (\mu_{0i} - \nu_{0i})_-^2 / N_2}$, gdzie $_-$ oznacza funkcję przyporządkowującą wartości ujemnej tę samą wartość, a wartości dodatniej wartość 0,

natomiast T oznacza liczbę rozpatrywanych inwestycji. W przypadku inwestycji o założonych stopach zwrotu 1, 2, 5 i 10 procent μ_{0i} wynosi odpowiednio 0,01, 0,02, 0,05 i 0,1 dla każdego $i = 1, \dots, T$. W przypadku inwestycji o najmniejszym ryzyku μ_{0i} dla każdego skonstruowanego portfela jest inne. Ponieważ dla wszystkich stóp prowizji wyniki są podobne, prezentujemy tylko te uzyskane dla inwestycji, dla których stopa prowizji wynosiła 0 procent. Rozpatrywane wielkości w zależności od długości okresu inwestycji i wielkości założonej stopy zwrotu przedstawiamy na wykresach 1 i 2.



Rysunek 1: Średni błąd różnic dodatnich dla portfeli o stopie prowizji 0% w zależności od długości trwania inwestycji i założonej stopy zwrotu.



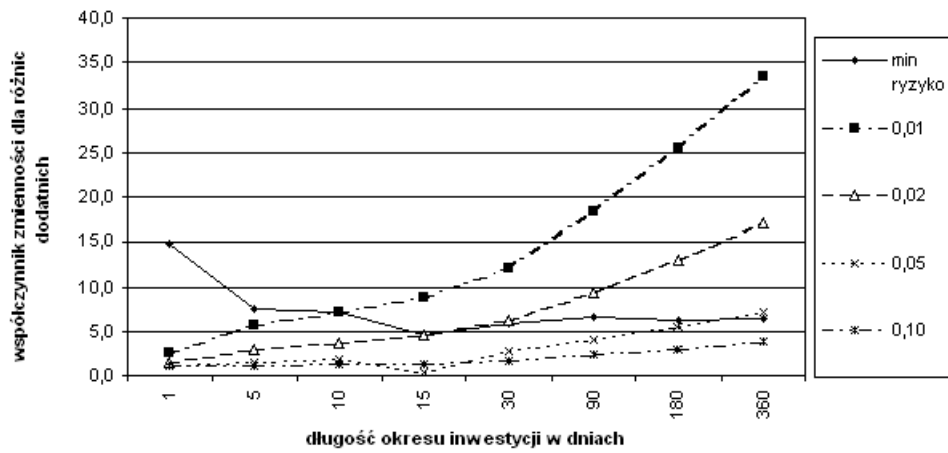
Rysunek 2: Średni błąd różnic ujemnych dla portfeli o stopie prowizji 0% w zależności od długości trwania inwestycji i założonej stopy zwrotu.

Na podstawie wykresu 1 można stwierdzić, że wielkość dodatnich odchylen dla okresów inwestycji wynoszących 1, 5, 10, 15 i 30 dni jest podobna, niezależnie od stopy zwrotu μ_0 . Dla kolejnych długości okresów inwestycji odchylenia te są coraz większe. Wyrażna też staje się różnica w wielkości odchylen dla portfeli dających najmniejsze ryzyko w stosunku do pozostałych portfeli. Z wykresu 2 wynika, że wraz ze wzrostem długości okresu inwestycji ujemne (a więc korzystne dla inwestora) odchylenia są coraz większe. Dla okresów inwestycji wynoszących 10 i 180 dni można też zauważyć wyraźne zwiększenie wielkości odchylen w porównaniu z sąsiednimi okresami. Mogłoby to sugerować, że spośród rozpatrywanych portfeli inwestowanych na krótki okres najlepsze wyniki dają inwestycje dziesięciodniowe, a w długim okresie – zainwestowane na 180 dni. Jeśli chodzi o wybór założonej stopy zwrotu, to najmniejsze ujemne, a jednocześnie największe dodatnie odchylenia uzyskuje się dla stopy zwrotu portfela o najmniejszym ryzyku, co wskazuje, że ten sposób konstrukcji portfela jest najmniej korzystny. Wybór założonej stopy zwrotu nie jest już tak jednoznaczny. Z analizowanych wykresów wynika, że im wyższa założona stopa zwrotu tym większe są odchylenia zarówno dodatnie jak i ujemne. W przypadku odchylen dodatnich różnice nie są jednak tak znaczące jak w przypadku odchylen ujemnych. Podzielenie rozpatrywanych miar przez wielkości założonych stóp zwrotu (w przypadku portfela o minimalnym ryzyku przez średnią oczekiwaną stopę zwrotu) powoduje, że największe ujemne, a jednocześnie największe dodatnie odchylenia przypadające na jednostkę założonej stopy zwrotu mają inwestycje o stopie zwrotu wynoszącej 1 procent, a najmniejsze ujemne i dodatnie odchylenia przypadające na jednostkę założonej stopy zwrotu mają inwestycje o stopie zwrotu wynoszącej 10 procent i inwestycje dające najmniejsze ryzyko. Wnioski dotyczące długości okresu inwestycji pozostają nie zmienione. Powyższych spostrzeżeń dokonano na podstawie analizy wykresów 3 i 4.

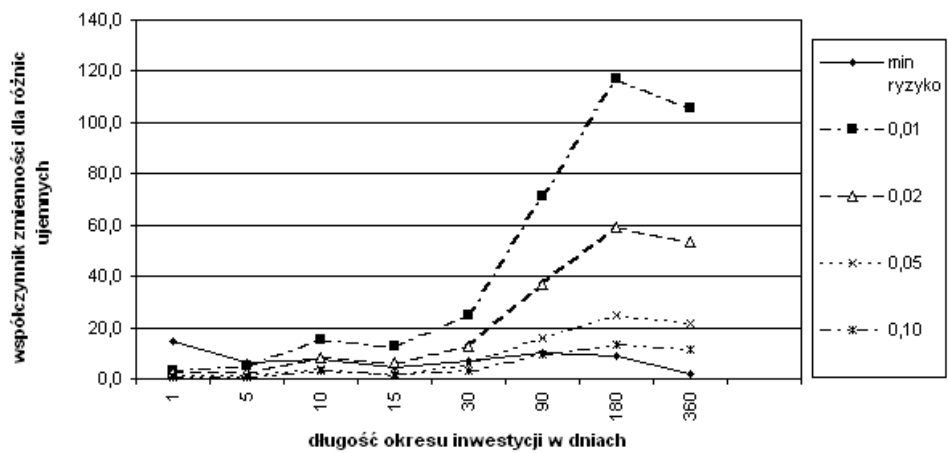
3.2 Rzeczywista stopa zwrotu

Dla każdego z okresów inwestycji d i każdej stopy zwrotu μ_0 przedstawionych w tabeli 1 obserwujemy zbiór rzeczywistych stóp zwrotu, wyliczonych dla czterech wymienionych wcześniej stóp prowizji c . Trójkom (d, μ_0, c) odpowiadają więc zbiory złożone z 1700–2700 rzeczywistych stóp zwrotu. W niniejszym podrozdziale zbiory te analizujemy jako próby proste pochodzące z nieznanymi rozkładów.

Tabela 3 przedstawia średnie próbkowe tych rozkładów. Przy braku prowizji, wszystkie średnie, z wyjątkiem średnich dla inwestycji 5-dniowych przy założonej stopie zwrotu, są dodatnie. Przy założeniu prowizji, wszystkie średnie dla inwestycji krótszych niż kwartalne są ujemne. Dla inwestycji półrocznych i rocznych wszystkie średnie dla stóp prowizji mniejszych od 5 procent są dodatnie i w znacznej większości przewyższają zakładane stopy zwrotu. Oznacza to, że – średnio rzecz biorąc – optymalizacja portfela



Rysunek 3: Współczynnik zmienności dla różnic dodatnich dla portfeli o stopie prowizji 0% w zależności od długości trwania inwestycji i założonej stopy zwrotu.



Rysunek 4: Współczynnik zmienności dla różnic ujemnych dla portfeli o stopie prowizji 0% w zależności od długości trwania inwestycji i założonej stopy zwrotu.

Tabela 3: Średnie rzeczywistych stóp zwrotu z inwestycji według długości okresu inwestycji d , założonej stopy zwrotu μ_0 i stopy prowizji c .

μ_0 (%)	c (%)	d (dni)							
		1	5	10	15	30	90	180	360
– ^a	0	0,05	0,16	0,61	1,02	1,77	3,96	10,12	5,91
– ^a	1	–1,93	–1,82	–1,38	–0,98	–0,24	1,90	7,94	3,82
– ^a	2	–3,88	–3,77	–3,33	–2,94	–2,22	–0,12	5,80	1,76
– ^a	5	–9,48	–9,38	–8,97	–8,60	–7,92	–5,94	–0,37	–4,17
1	0	0,09	–0,12	0,50	0,57	1,49	2,60	13,37	9,79
1	1	–1,89	–2,10	–1,49	–1,42	–0,52	0,56	11,13	7,62
1	2	–3,83	–4,04	–3,44	–3,37	–2,49	–1,43	8,93	5,48
1	5	–9,44	–9,63	–9,07	–9,01	–8,17	–7,18	2,58	–0,67
2	0	0,10	–0,13	0,52	0,60	1,51	2,76	13,39	9,90
2	1	–1,88	–2,10	–1,47	–1,40	–0,50	0,73	11,14	7,72
2	2	–3,82	–4,04	–3,42	–3,35	–2,47	–1,27	8,94	5,59
2	5	–9,43	–9,64	–9,06	–8,99	–8,16	–7,02	2,59	–0,57
5	0	0,09	–0,13	0,55	0,65	1,55	2,97	13,99	10,28
5	1	–1,90	–2,11	–1,44	–1,35	–0,46	0,94	11,73	8,09
5	2	–3,84	–4,05	–3,39	–3,30	–2,43	–1,06	9,52	5,95
5	5	–9,45	–9,64	–9,03	–8,94	–8,12	–6,83	3,13	–0,23
10	0	0,10	–0,10	0,61	0,66	1,69	3,65	14,54	11,06
10	1	–1,88	–2,08	–1,38	–1,34	–0,33	1,59	12,27	8,86
10	2	–3,83	–4,02	–3,33	–3,29	–2,30	–0,42	10,05	6,70
10	5	–9,43	–9,61	–8,97	–8,93	–8,00	–6,22	3,63	0,48

^a Inwestycje o minimalnym ryzyku.

przy pomocy modelu Markowitza daje korzystne rezultaty dla inwestycji półrocznych i rocznych przy niskiej stopie prowizji.

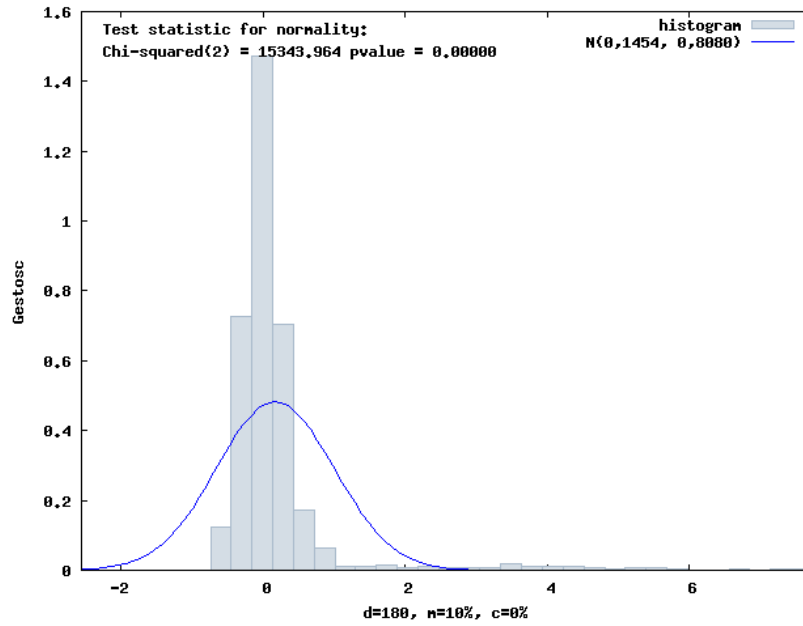
Tabela 4 przedstawia próbkowe odchylenia standardowe rozkładów, odpowiadające średnim z tabeli 3. Można zauważyć, że im dłuższy jest okres inwestycji, tym większe jest odchylenie standardowe stopy zwrotu, przy czym szczególnie duże jest ono dla inwestycji półrocznych. Na przykład dla inwestycji półrocznych przy założonej stopie zwrotu 10 procent i braku prowizji średnia stopa zwrotu jest równa 14,54% przy odchyleniu standardowym 80,80%. Tak duże odchylenia stanowią przeszkodę w praktycznym zastosowaniu modelu Markowitza.

Rysunek 5 przedstawia typowy histogram rozkładu stóp zwrotu dla inwestycji o okresie różnym od 5 dni. Rozkład prawdopodobieństwa jest prawostronnie skośny i wyostrowiony, co sugeruje, że mało prawdopodobne bardzo wysokie stopy zwrotu zwiększają jego wartość oczekiwaną. Dla inwestycji 5-dniowych (rysunek 6) rozkłady prawdopodobieństwa są również wyostrowione, ale lewostronnie skośne.

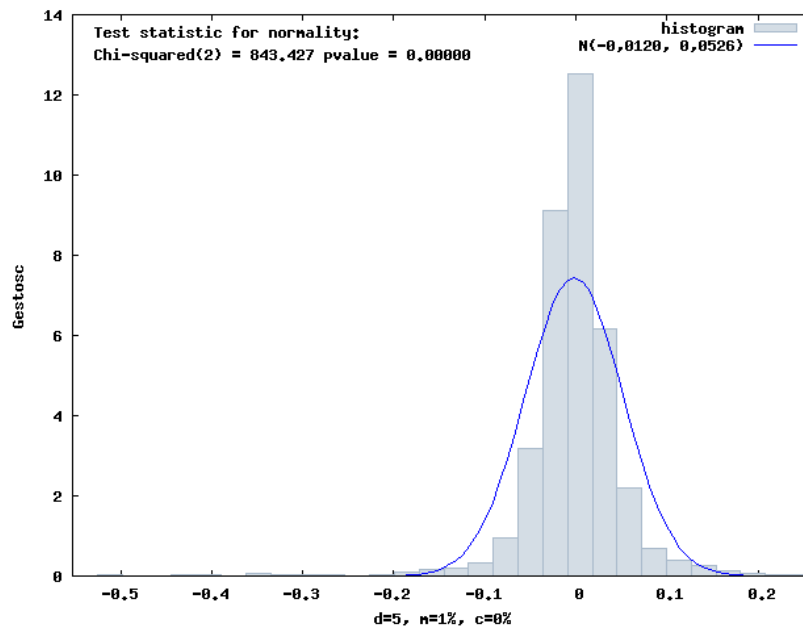
Tabela 4: Odchylenie standardowe rzeczywistych stóp zwrotu z inwestycji według długości okresu inwestycji d , założonej stopy zwrotu μ_0 i stopy prowizji c .

μ_0	c	d (dni)							
		1	5	10	15	30	90	180	360
– ^a	0	2,18	4,68	7,83	9,04	16,05	41,31	68,12	49,11
– ^a	1	2,14	4,59	7,67	8,86	15,73	40,50	66,77	48,14
– ^a	2	2,09	4,50	7,52	8,69	15,42	39,69	65,45	47,19
– ^a	5	1,97	4,24	7,08	8,18	14,52	37,38	61,63	44,44
1	0	2,60	5,26	10,97	10,74	18,54	47,99	80,50	72,00
1	1	2,55	5,15	10,75	10,52	18,17	47,03	78,91	70,57
1	2	2,50	5,05	10,54	10,31	17,81	46,10	77,35	69,17
1	5	2,35	4,76	9,92	9,71	16,77	43,42	72,84	65,14
2	0	2,73	5,24	10,98	10,73	18,57	48,92	80,39	72,00
2	1	2,68	5,14	10,76	10,52	18,20	47,96	78,80	70,58
2	2	2,63	5,04	10,55	10,31	17,84	47,01	77,24	69,18
2	5	2,47	4,74	9,93	9,71	16,80	44,26	72,73	65,15
5	0	2,59	5,22	10,97	10,96	18,59	48,84	80,58	72,03
5	1	2,54	5,11	10,76	10,74	18,22	47,87	78,98	70,60
5	2	2,49	5,01	10,54	10,53	17,86	46,92	77,42	69,20
5	5	2,35	4,72	9,93	9,92	16,82	44,18	72,90	65,17
10	0	2,60	5,21	11,17	10,87	18,66	53,09	80,80	72,09
10	1	2,55	5,10	10,95	10,66	18,30	52,04	79,20	70,66
10	2	2,50	5,00	10,73	10,45	17,93	51,01	77,63	69,27
10	5	2,36	4,71	10,11	9,84	16,89	48,03	73,11	65,23

^a Inwestycje o minimalnym ryzyku.



Rysunek 5: Histogram rozkładu rzeczywistych stóp zwrotu dla półrocznej inwestycji o założonej stopie zwrotu 10% przy braku prowizji.



Rysunek 6: Histogram rozkładu rzeczywistych stóp zwrotu dla 5-dniowej inwestycji o założonej stopie zwrotu 1% przy braku prowizji.

4 Zakończenie

Przeprowadzone badania nie potwierdziły, że wybór optymalnego portfela na podstawie teorii Markowitza jest korzystny dla inwestora. Osiągane stopy zwrotu były w większości przypadków mniejsze od zakładanych, niezależnie od długości okresu inwestycji, założonej stopy zwrotu i wysokości prowizji.

Ponadto, mimo iż średnie stopy zwrotu z niektórych portfeli konstruowanych według teorii Markowitza były wysokie, rozrzut stóp wokół wartości średniej był tak duży, że czynił tę metodę nieużyteczną w praktyce inwestycyjnej.

Literatura

- [1] Marek Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1969.
- [2] Stanisław Galus, Efektywność rynków akcji na warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Studium empiryczne, niepublikowana rozprawa doktorska, Sopot 1997.
- [3] Saul I. Gass, Programowanie liniowe. Metody i zastosowania, PWN, Warszawa 1980.
- [4] Krzysztof Jajuga, Teresa Jajuga, Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [5] Harry M. Markowitz, Portfolio selection. Efficient diversification of investments, John Wiley & Sons, Nowy Jork 1959.
- [6] Aleksander Zeliaś, Barbara Pawelek, Stanisław Wanat, Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.